

# O Número de Graham e o Infinito

Vamos imaginar um número muito grande.

Por exemplo, o fatorial de **CEM MIL**.

O fatorial de um número  $n$  corresponde ao produto entre si de todos os números anteriores até  $n$ , e é representado com um pontinho de exclamação, assim:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

o que leva a um crescimento muito rápido. Por exemplo, o fatorial de 10 é igual a 3.628.800 (número que está na casa dos milhões), e o de 20 já nos leva à casa dos quintilhões: 2.432.902.008.176.640.000.

Tendo isso em vista não se pode esperar que o fatorial de **CEM MIL** seja um número qualquer. Uma representação aproximada desse número é:

$$100.000! = 2,824 \times 10^{4,565 \times 10^5}$$

sendo necessário — não só por motivo de espaço mas também de bom senso — representá-lo desta maneira, pois esse número possui 456.574 algarismos e encheria mais de cem páginas! É, sem dúvida um número imenso, mas não finito. Vamos começar, no entanto, a falar do Infinito.

No século XIX George Cantor (1845-1918) introduziu o Infinito na Matemática.

Isso, claro, não é exato: o que Cantor fez foi dar um tratamento rigoroso à idéia matemática de Infinito com a descrição dos números transfinitos, ou seja, os cardinais<sup>1</sup> de um conjunto infinito. Como exemplo, temos o  $\aleph_0$  (Alef Zero), o primeiro transfinito, a cardinalidade do conjunto dos números naturais.

O entendimento que havia acerca do Infinito, desde a antigüidade e até então, não ia além de umas noções bastante vagas, e o conceito parecia tão incômodo que a descoberta dos números irracionais (aqueles que possuem

---

<sup>1</sup> A cardinalidade de um conjunto expressa o número de elementos desse conjunto. No caso de conjuntos infinitos, a cardinalidade é infinita.

uma quantidade infinita de casas decimais, como as raízes não exatas, p. ex., a raiz quadrada de 2, ou o número  $\pi$  [ $Pi$ ]) causou horror aos pitagóricos. Filósofos como Pitágoras, Parmênides e Platão tinham consciência de sua existência, porém o Infinito era visto por eles como algo inacessível ao entendimento, portanto, inabordável do ponto de vista da razão.

As múltiplas abordagens do Infinito constituem um tema vastíssimo ao qual não me aventuro, e mesmo se pretendesse ater-me apenas ao Infinito na Matemática, eu, que não sou matemático e estudo o assunto apenas como curioso, ver-me-ia na necessidade de proceder a extensas pesquisas. Meu propósito com este breve ensaio é apenas chamar a atenção para uma particularidade do tema, qual seja, a idéia que somos capazes de fazer acerca dos números muito grandes e, por extensão, acerca do conceito de Infinito. Veremos, no decorrer da leitura, a resposta.

Para nos atermos apenas a essa particularidade, podemos começar dizendo que a noção mais elementar que nos ocorre do Infinito, de forma intuitiva embora vaga, é a partir da seqüência dos números naturais:

1, 2, 3, 4, 5...

Sabemos que nesta seqüência numérica sempre é possível adicionar uma unidade ao último número da lista, de forma que os números tendem a crescer indefinidamente e nunca teremos de fato um *último número*:

...6, 7, 8, 9... 1000... 1000!... 10.000!... 100.000!... ..  $\infty$

Então se representa o Infinito por esse símbolo no fim da linha, o que nos surge aqui como um contra-senso, porque graficamente o **fim** da linha dá lugar ao **sem-fim**: pois  $\infty$  não é um número, mas apenas o símbolo do sem-fim!

Uma outra forma simples de exemplificar o Infinito numérico é através do conjunto dos números inteiros. Observe que a seqüência dos números naturais possui um começo, que é o número 1. A seqüência dos números inteiros, porém, que pode ser representada pela conhecida “reta numerada”, não possui nem começo nem fim, sendo o *zero* o meio da seqüência:

$-\infty$  ..... - 5   - 4   - 3   - 2   - 1   0   1   2   3   4   5 .....  $\infty$

---

O leitor, no entanto poderá perguntar se podemos falar em meio, ou metade, de algo infinito, e esta pergunta é legítima, se tivermos em conta que certas operações envolvendo o Infinito simplesmente não são definidas, como

por exemplo:

Tabela I

$$\infty - \infty = ?$$

$$\infty \div \infty = ?$$

$$1^\infty = ?$$

$$0 \times \infty = ?$$

Uma característica interessante dos conjuntos Infinitos é que uma parte pode ser igual ao todo. Assim, dado o conjunto dos números naturais, podemos criar a seguinte tabela:

Tabela II

|     |     |
|-----|-----|
| 1   | 2   |
| 2   | 4   |
| 3   | 6   |
| 4   | 8   |
| 5   | 10  |
| ... | ... |

Observe que os elementos da segunda coluna correspondem biunivocamente aos da primeira (sendo esta a seqüência dos números naturais). Dir-se-ia que o conjunto dos elementos da segunda coluna corresponde à metade do conjunto dos elementos da primeira, contudo possui o mesmo número de elementos.

Tabela similar pode ser construída fazendo uma correspondência biunívoca entre os naturais e os inteiros:

Tabela III

|     |     |
|-----|-----|
| 1   | 1   |
| 2   | -1  |
| 3   | 2   |
| 4   | -2  |
| 5   | 3   |
| 6   | -3  |
| ... | ... |

Isso nos mostra que o conjunto dos inteiros é enumerável, ou seja, seus elementos podem ser contados, mesmo sendo infinitos, e que embora seja

infinito em ambas as direções ele possui o mesmo número de elementos dos naturais, que só é infinito à direita; e ainda, que possui o mesmo número de elementos do conjunto dos dobros mostrado na tabela II!

Em vista disto, é legítimo considerar que o zero ocupa o centro da reta numerada, ou seja, o centro de uma seqüência de números que se estende infinitamente em ambas as direções.

Ao sistematizar o Infinito, George Cantor descobriu que há conjuntos infinitos maiores que outros também infinitos, o que pode parecer absurdo mas que é matematicamente exato, e embora eu não vá entrar por esse caminho vale a pena dar uma olhada nele, ainda que apenas *en passant*: já referimos a cardinalidade do conjunto dos números naturais, que é (segundo Cantor) o menor dos infinitos,  $\aleph_0$  (Alef Zero). Esta é a cardinalidade dos conjuntos enumeráveis: os naturais, os inteiros e os racionais são todos conjuntos enumeráveis, pois os seus elementos podem ser postos, entre si, em correspondência biunívoca. O conjunto dos números reais, porém, não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, como Cantor demonstrou através de um método que se tornou conhecido como “o corte diagonal de Cantor”, tratando-se portanto de um conjunto que possui uma cardinalidade infinita maior que os enumeráveis.

Isso esclarece a indefinibilidade das operações mostradas na tabela I. P. ex., ao tentar-se resolver a expressão  $\infty - \infty$ , depara-se com a questão da cardinalidade de ambos os infinitos envolvidos na operação.

Passemos agora ao tema principal deste ensaio, o qual pode ser apresentado através da formulação de uma pergunta aparentemente simples: **quão grande é o Infinito?** Que idéia você, leitor, faz do Infinito? Você tem uma resposta pronta para essa questão?

Para tornar as coisas mais simples, vou fazer uma outra pergunta: você é capaz de imaginar um número muito grande, tão grande que permita uma idéia, ainda que pálida, do Infinito? (Mas quando em falo em “imaginar um número muito grande” eu me refiro a ter uma idéia suficientemente clara desse número, e não uma idéia vaga. Comecei este ensaio apresentando-lhe o imenso CEM MIL FATORIAL, mas seria o leitor capaz de ter uma noção pelo menos aproximada da grandeza desse número?)

Enquanto você se põe a dar tratos à bola, vamos falar de alguns números grandes.

Um número bastante grande é aquele a que se refere a lenda do jogo de xadrez. Um certo rei, entediado, prometeu um prêmio a quem inventasse um divertimento que o alegrasse, mas que deveria lembrar os furores de uma



Um número de tal dimensão não possui utilidade prática, a não ser no campo abstrato da Matemática. Mesmo na ciência há raros exemplos de números com tal dimensão. Por exemplo, o número de partículas no Universo observável é aproximadamente  $10^{80}$  partículas, um valor inferior a um googol!

O número  $9,474 \times 10^{181}$  é um exemplo dos raros números muito grandes com aplicação prática na ciência: trata-se do número aproximado de volumes de Planck existentes no Universo, e é bem maior que um googol.<sup>2</sup>

Isto nos leva a pensar na estonteante grandeza do Googolplex, que é dez elevado à potência googol, ou seja,  $10^{\text{googol}}$ .

$10^{10^{100}}$

O Googolplex, muitíssimas vezes maior que o fatorial de CEM MIL, possui uma tal quantidade de zeros que não seria possível escrever todos eles, mesmo que anotássemos alguns milhares de zeros em cada partícula existente no Universo! Seria o leitor capaz de imaginar números ainda mais extensos de maneira que pudesse ter uma noção suficiente da grandeza do Infinito?

Essa questão aparentemente ingênua mostra o quanto somos limitados em nosso conhecimento da realidade: noções que fogem àquelas a que estamos habituadas no cotidiano não são compreendidas. Não somos capazes de perceber frações muito pequenas (ou períodos muito grandes) de tempo, assim como nos foge à compreensão frações mínimas de comprimento ou extensões muito vastas.

Da mesma forma a infinitude dos números é, para nós, apesar de Cantor, uma noção bastante vaga — e é neste ponto que apresento ao leitor o **Número de Graham** — um número tão extenso, tão fabulosamente grande que o Googolplex, se comparado a ele, equivale a um centavo comparado à todo o dinheiro que há no mundo, e é ainda muito — muito — menor!

O número de Graham —  $G$  — foi descoberto pelo matemático Ronald Graham, na década de 70, ao solucionar um determinado problema de matemática abstrata. Na edição de 1980 do Guinness Book o assim chamado Número de Graham figurou como o maior número utilizado numa prova matemática até então.

Consta que números maiores que  $G$  surgiram mais tarde, em outras provas matemáticas, mas o número de Graham tornou-se emblemático por ser o primeiro: é tão grande que não é possível representá-lo nem mesmo através

---

<sup>2</sup> O volume de Planck é o cubo da extensão de Planck, que é  $1,616 \times 10^{-33}$  mm, e equivale a  $4,221 \times 10^{-99}$  mm<sup>3</sup>.

de torres de potências como os números (imensos) abaixo:

$$\text{Googolplex} = 10^{10^{100}}$$

$$\text{Googolplexian} = 10^{10^{10^{100}}}$$

$$\text{Números de Skews} = \text{o } 1^{\circ} \text{ é aprox. } 10^{10^{10^{34}}} \text{ e o } 2^{\circ}, 10^{10^{10^{1000}}}$$

$$\text{Googolplexianth} = 10^{10^{10^{10^{100}}}}$$

Para representar  $G$  é preciso recorrer à chamada **Notação de Knuth**, em que se usam setas apontando para cima para indicar potenciação.

Uma representação de  $G$  é como se segue:

$$G = 3 \uparrow \uparrow \underbrace{\dots \uparrow 3}_{(g_{63}) 3 \uparrow \uparrow \dots \uparrow 3} \left. \begin{array}{c} \vdots \\ (g_2) 3 \uparrow \uparrow \dots \uparrow 3 \\ (g_1) 3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 \end{array} \right\}$$

O cálculo de  $G$  inicia-se na camada inferior,  $g_1$ , onde encontramos o algarismo 3 seguido de quatro setas apontando para cima e outro 3.

Antes de continuarmos falando sobre  $G$ , vamos dar olhada em como funciona esta notação:

$$3 \uparrow 3 \text{ significa } 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27;$$

$$3 \uparrow \uparrow 3 \text{ significa } {}^3 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987;$$

Observe-se que neste caso a indicação de potência fica à esquerda da base e, a seguir, no desenvolvimento da potenciação (índices à direita da base) procede-se “de cima para baixo”, de forma que temos  $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$  e não  $3^{3^3} = (3^3)^3 = 27^3 = 19.683$ . A consequência é que o simples acréscimo de uma seta já levou a um número bastante grande:

$$3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow 3 \uparrow \uparrow 3 = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ cópias de } 3} = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{7.625.597.484.987 \text{ cópias de } 3}$$

— e então começamos a perceber que os números crescem muito rapidamente.

O cálculo desta primeira camada ( $g_1$ ) indicará o **número de setas** entre os algarismos 3 da segunda camada ( $g_2$ ); o número resultante de  $g_2$  indicará o **número de setas** na terceira camada, e assim por diante até a  $64^a$  camada, que resultará, por fim, no número de Graham.

Note que em  $g_1$  **há apenas quatro setas**, cujo cálculo já conduz a um número inimaginavelmente grande:

$$3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow 3) = 3 \uparrow \uparrow 7.625.597.484.987 =$$

$$7.625.597.484.987 \text{ } 3 = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} \left. \vphantom{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \right\} 7.625.597.484.987 \text{ potências de 3 desenvolvidas "de cima para baixo"}$$

em que o número de 3s na expressão à direita é:

$$3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow \uparrow 3) = 3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow (3 \uparrow \uparrow \dots (3 \uparrow \uparrow 3) \dots)), \quad (i)$$

Enfatizando: o número dado acima é o número de 3s à direita de (i), **e não** o resultado da expressão  $3 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 3$ . Aliás, somente a iteração entre os parênteses centrais na expressão à direita de (i) é igual a

$$\underline{3 \uparrow \uparrow 3 = {}^3 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987.}$$

O resultado de (i) define o número de setas que deverão aparecer em  $g_2$ , e é tão extenso que, mesmo que se escrevêssemos milhares de algarismos em cada volume de Planck existente no universo observável, não haveria espaço suficiente para expressá-lo. Imaginemos agora o resultado do cálculo de  $g_2$  com esse fabuloso número de setas, e o próprio  $G$  com o número de setas aumentando extraordinariamente a cada camada, até  $g_{64}$ !!

Pelo que foi dito até agora, talvez o leitor tenha (ou mais certamente **não** tenha) uma idéia da real dimensão do número de Graham:  $G$  é tão extenso que, embora tenha sido possível calcular seu último algarismo, que é 7, ninguém sabe qual é seu primeiro algarismo, nem quantos algarismos tem, e o próprio Ronald Graham em depoimento afirma conhecer pouco a respeito dele.

E, no entanto,  $G$  não está mais próximo do Infinito do que o número 1.

## **Fontes e leituras recomendadas:**

Números muito grandes (Wikipédia)

Número de Graham (Wikipédia)

As diferentes faces do Infinito (Edição especial nº 15 de Scientific American Brasil)

História da Matemática, de Charles Boyer